

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'
19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφεται κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $a + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

δ) $(\sin x)' = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}.$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq w \leq 7$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμψής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμψής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$
$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7