

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ – 2000

ΘΕΜΑ 1^{ο*}

- A. α) Σχολικό βιβλίο σελ.63
β) Σχολικό βιβλίο σελ.67

γ) Δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός γιατί $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \neq 0$

B1 $T_1 \rightarrow 3$
 $T_2 \rightarrow 2$

B2 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
οπότε $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -2I$

α) $|A| = |-2I| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ άρα κανονικός μετασχηματισμός

β) Έστω $M'(x', \psi')$ η εικόνα του σημείου M μέσω του μετασχηματισμού T

τότε $\begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$ όπου $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2\psi' \\ 2x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\psi' \\ \frac{1}{2}x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\psi' \text{ και } \psi = \frac{1}{2}x' \text{ αντικαθιστώντας τα } x \text{ και } \psi \text{ στην εξίσωση της}$

ευθείας (ε) έχω $2\frac{1}{2}\psi' - \frac{1}{2}x' + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\psi' - x' + 10 = 0$ που είναι η εξίσωση (ε') της εικόνας της ευθείας (ε). Άρα η (ε') είναι $2\psi - x + 10 = 0$

****Το 1^ο θέμα για τη σχολική χρονιά 2000-2001 είναι εκτός ύλης**

ΘΕΜΑ 2^ο

A. α) $z = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i+2i+3}{4+9} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$

β) $z = 1-i = \rho[\cos\theta + i\sin\theta]$

όπου $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{άρα } z = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\gamma) \rightarrow \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$\delta) \rightarrow -4$$

$$B. \left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i| \Leftrightarrow \text{περιορισμός } z \neq i$$

$$|z-1|^2 = |z-i|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = (z-i)(\overline{z-i}) \Leftrightarrow$$

$$(z-1)(\overline{z}-1) = (z-i)(\overline{z}+i) \Leftrightarrow$$

$$z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = z\overline{z} + zi - \overline{z}i + 1 \Leftrightarrow -(z + \overline{z}) = i(z - \overline{z}) \Leftrightarrow$$

$$-2\chi = i 2\psi \Leftrightarrow -2\chi = -2\psi \Leftrightarrow \chi = \psi \quad \text{άρα είναι τα σημεία της διχοτόμου 1ης και 3ης γωνίας}$$

ΘΕΜΑ 3ο

A.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x^2 - 8x + 16) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} [(a^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(a+1)e^{5-x}]$$

$$= (a^2 + \beta^2) \ln e + 2(a+1)e^0 = a^2 + \beta^2 + 2a + 2.$$

B.

$$f(5) = a^2 + \beta^2 + 2a + 2.$$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 5$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5).$

$$\text{Οπότε } 1 = a^2 + \beta^2 + 2a + 2 \Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + 2a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Γ.

Για $a = -1, \beta = 0$ έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ \ln(x - 5 + e), & x \geq 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 5 + e) = +\infty$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 5 + e) = +\infty$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A) $f'(t) = 8\ln(t+1) - 2t + c, c \in \mathbb{R}$.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ η συγκέντρωση του φαρμάκου είναι μηδενική άρα $f(0)=0$, οπότε $c=0$.

Άρα $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t, t \geq 0$

B) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{t+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2t+6}{t+1} = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

t	0	3	$+\infty$
f'		+	-
f		o	

↗ ΜΕΓΙΣΤΟ ↘

Άρα η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό γίνεται μέγιστη όταν $t=3$.

Γ) $f(8) = 8(\ln 9 - 2) = 8(\ln 3 - 2) = 16(\ln 3 - 1) > 0$. Αφού $3 > e$.

Επομένως κατά την χρονική στιγμή $t=8$ υπάρχει επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό.

$f(10) = 8 \cdot \ln 11 - 20 \cong -0,8 < 0$

Η f είναι συνεχής στο $[8, 10]$ και

$f(8) > 0$

$f(10) < 0$

Επομένως υπάρχει $t_0 \in (8, 10)$ τέτοιο ώστε $f(t_0) = 0$

Άρα πριν την χρονική στιγμή $t=10$ η επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

(Η αρνητική τιμή της συγκέντρωσης $f(10)$ είναι μη ρεαλιστική).

Επιμέλεια : Λειβαδίτης Γιώργιος , Ξηναβελώνης Πέτρος