

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ – 2000

ΘΕΜΑ 1^{ο*}

A. α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;

Μονάδες 2,5

β) Αν $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ δεδομένο διάνυσμα και $M'(x',y')$ η εικόνα του M στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$, να βρείτε τα x',y' συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και του διανύσματος $\vec{u}$.

Μονάδες 5

γ) Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

B1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης I και δίπλα τον αριθμό της στήλης II που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

Στήλη I	Στήλη II
T_1 : «συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ »	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2 : «στροφή κατά γωνία $\pi/2$ »	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

B2. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό T με πίνακα $A = A_1 A_2 - A_2 A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντίστοιχως, του ερωτήματος **B1**.

α) Να δείξετε ότι ο T είναι κανονικός μετασχηματισμός.

Μονάδες 4,5

β) Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$ μέσω του μετασχηματισμού T .

Μονάδες 5

****Το 1^ο θέμα για τη σχολική χρονιά 2000-2001 είναι εκτός ύλης**

ΘΕΜΑ 2ο

A. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

A. $\frac{\pi}{4} - \theta$ B. $\frac{\pi}{2} + \theta$ Γ. $\theta - \frac{\pi}{2}$ Δ. $\pi + \theta$

Μονάδες 3

δ) Το z^4 είναι ίσο με:

A. 4 B. $4i$ Γ. $-4i$ Δ. -4

Μονάδες 3

B. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

$$\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x-5) + 2(\alpha+1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

A. Να βρεθούν τα, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

Μονάδες 6

B. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 10

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος **B** να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

Μονάδες 6

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη,

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).

Μονάδες 13