

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΘΕΜΑ 1°

A₁. Η εφαπτομένη (ε) στο A(x₀, f(x₀)) είναι : (ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

A₂. Για $x \neq x_0$ έχουμε: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x₀).

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή η f είναι συνεχής στο x₀.

B₁. α) ΛΑΘΟΣ β) ΛΑΘΟΣ γ) ΣΩΣΤΟ

B₂. α → 3

β → 1

γ → 5

δ → 2

ΘΕΜΑ 2°

$$\alpha) \quad W_1 = f(9 - 5i) = \frac{2(9 - 5i) + i}{9 + 5i - 2i} = \frac{18 - 9i}{9 + 3i} = \frac{6 - 3i}{3 + i} = \frac{(6 - 3i)(3 - i)}{10} = \frac{15 - 15i}{10} = \frac{3}{2}(1 - i)$$

$$W_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9 - 5i) \right]^{2004} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}(1 - i) \right]^{2004} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \right]^{2004} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right)^{2004} = \cos(501 \cdot 7\pi) + i \sin(501 \cdot 7\pi) =$$

$$= \cos(3506\pi + \pi) + i \sin(3506\pi + \pi) = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\beta) \quad \text{Είναι } |W_1| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{τότε } M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

τότε το σωστό είναι το Β

γ) Είναι $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, και $K = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{2} & -\eta\mu \frac{\pi}{2} \\ \eta\mu \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

άρα έχουμε: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

όπου ο αντίστροφος του $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ είναι $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3^ο

- α) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν παραγωγίσιμη σε αυτό και είναι γνησίως αύξουσα. Άρα το σύνολο τιμών της είναι το $[f(0), f(1)] = [2,4]$
Επειδή η τιμή 3 ανήκει στο σύνολο τιμών, τότε θα υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 3$
άρα η ευθεία $\psi = 3$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται στο x_0 το οποίο είναι μοναδικό γιατί η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$ είναι γνησίως αύξουσα επειδή $g'(x) = f'(x) > 0$

β) Επειδή $2 < f(\frac{1}{5}) < 4$
 $2 < f(\frac{2}{5}) < 4$
 $2 < f(\frac{3}{5}) < 4$
 $2 < f(\frac{4}{5}) < 4$

θα έχω: $4 \cdot 2 < f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5}) < 4 \cdot 4$
 $\Rightarrow 2 < \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4} < 4$

δηλαδή το $\frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$ ανήκει στο σύνολο τιμών $[2,4]$ της f άρα θα

υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$

- γ) Στο διάστημα $[0,1]$ ισχύει για την f το θεώρημα μέσης τιμής, άρα υπάρχει

$x_2 \in (0,1)$ ώστε: $f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow f'(x_2) = 4 - 2 \Rightarrow f'(x_2) = 2$

Όμως $f'(x_2)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $M(x_2, f(x_2))$ και 2 ο συντελεστής της ευθείας $y = 2x + 2000$

Άρα η εφαπτομένη στο M είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$

ΘΕΜΑ 4^ο

- α) Επειδή η συγκέντρωση επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά την χορήγηση του φαρμάκου τότε η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $t=6$ και η μέγιστη τιμή τους είναι 15. Άρα ισχύουν οι σχέσεις:

(i): $f'(6) = 0$ και (2): $f(6) = 15$ θα έχουμε:

$$f'(t) = \frac{\alpha \left(1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right)^2 - \frac{2\alpha}{\beta^2} t^2}{\left(1 + \frac{t^2}{\beta^2}\right)^2}$$

Άρα

$$(1): \alpha \left(1 + \left(\frac{6}{\beta}\right)^2\right)^2 - \frac{2\alpha}{\beta^2} \cdot 26 = 0 \Rightarrow 1 + \frac{36}{\beta^2} - \frac{72}{\beta^2} = 0 \Rightarrow \beta^2 - 36 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta = 6$$

$$\text{και (2): } f(6) = 15 \Rightarrow \frac{\alpha \cdot 6}{1 + \frac{36}{\beta^2}} = 15 \Rightarrow 6\alpha = 15 + \frac{36}{\beta^2} \cdot 15 \Rightarrow 6\alpha = 30 \Rightarrow \alpha = 5$$

- β) Επειδή η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η συγκέντρωση είναι τουλάχιστον ίση με 12 τότε θα ισχύει:

$$f(t) \geq 12 \Rightarrow \frac{5t}{1 + \frac{t^2}{36}} \geq 12 \Rightarrow 5t \geq 12 + \frac{t^2}{3} \Leftrightarrow t^2 - 15t + 12 \leq 0 \quad \text{άρα } t \in [3, 12]$$

Επιμέλεια : Δριμιλής Βασίλειος