

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΕ

Θέμα 1°

α)

x_i	Συχνότητα (v_i)	$v_i \cdot x_i$	Σχετική συχνότητα (f_i)	Σχετική συχνότητα % ($f_i\%$)
1	12	12	0,24	24
2	15	30	0,3	30
3	8	24	0,16	16
4	5	20	0,1	10
5	10	50	0,2	20
αθροίσματα	50	136	1	100

β) $\bar{x} = \frac{136}{50} = 2,72 \approx 3$

Θέμα 2°

α) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

β) $B = x \cdot A + y \cdot I = x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 2x \\ 3x & x+y \end{bmatrix}$

γ) $A^2 = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 2x \\ 3x & x+y \end{bmatrix}$

Άρα:

i) $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

ii) $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

iii) $x + y = 7 \Leftrightarrow 2 + y = 7 \Leftrightarrow y = 7 - 2 \Leftrightarrow y = 5$

Επομένως: $x=2$ και $y=5$

Θέμα 3°

α) Έχουμε: $f'(x) = (-2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}) = -6x^2 - 6x + 12$

β) Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης είναι:

x	$-\infty$	-2		1	$-\infty$	
f'(x)		-	○	+	○	-
f(x)		↘		↗		↘
			Τ.ΕΛ		Τ.Μ	

γ) Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $A(-2, f(-2))$ και $B(1, f(1))$

δ) Τα τοπικά ακρότατα είναι:

$$\text{Για } x = -2: f(-2) = -2(-2)^3 - 3(-2)^2 + 12(-2) + \sqrt{2} = 16 - 12 - 24 + \sqrt{2} = -20 + \sqrt{2}$$

$$\text{Για } x = 1: f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + \sqrt{2} = -2 - 3 + 12 + \sqrt{2} = 7 + \sqrt{2}$$

Θέμα 4°

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 3-2 = 1$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1) = \lambda^2 \cdot 3^2 + 3\lambda \cdot 3 + 1 = 9\lambda^2 + 9\lambda + 1$$

γ) Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=3$ πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 1$$

$$\text{Και } f(3) = \lambda^2 \cdot 3^2 + 3\lambda \cdot 3 + 1 = 9\lambda^2 + 9\lambda + 1$$

$$\text{Άρα: } 9\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 1 \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 9\lambda + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 9\lambda^2 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0$$

Οπότε $\lambda=0$ ή $\lambda=-1$

Επιμέλεια: Γιαννενάκη Αριέττα, Μαθηματικός