

ΘΕΜΑ 1

A.1. Θεωρία σχολικού βιβλίου

A.2.

- α. Σωστό
- β. Λάθος
- γ. Λάθος
- δ. Σωστό
- ε. Σωστό

- B.1.
- $1 \rightarrow \zeta$
 - $2 \rightarrow \gamma$
 - $3 \rightarrow \alpha$
 - $4 \rightarrow \delta$
 - $5 \rightarrow \beta$

B.2. Επειδή $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2

Είναι $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $x_0=3$ και θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\alpha x^2) = 9\alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-e^{x-3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} = -1$$

$f(3)=9\alpha$ άρα θα έχουμε: $9\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{9}$

β. Θα έχουμε ότι η εφαπτομένη στο $A(4, f(4))$ είναι: (ε): $\psi-f(4)=f'(4)(x-4)$

τότε: $f(4)=\frac{1-e^{4-3}}{4-3}=1-e$

για $x>3$ θα έχουμε: $f'(x)=\frac{-e^{x-3}(x-3)-1+e^{x-3}}{(x-3)^2}=\frac{4e^{x-3}-xe^{x-3}-1}{(x-3)^2}$

άρα $f'(4)=\frac{4e^{4-3}-4e^{4-3}-1}{(4-3)^2}=-1$

τότε: (ε): $\psi(1-\epsilon)=-1(x-4)$ δηλαδή $\psi=-x+5-\epsilon$

γ. Θεωρούμε ότι $\alpha=-\frac{1}{9}$ τότε $f(x)=-\frac{1}{9}x^2<0$

$$\text{Θα είναι: } E=-\frac{1}{9}\int_1^2(-x^2)dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}\text{ τμ}$$

Σημείωση: Μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Θα είναι: } E=\left|\alpha\right|\int_1^2x^2dx=\left|\alpha\right|\cdot\frac{7}{3}\text{ τμ.}$$

ΘΕΜΑ 3

Θα έχουμε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη: $3f^2(x)f'(x)+2\beta f(x)f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6$

$$\text{Άρα: } f'(x)[3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma]=3x^2-4x+6 \quad (1)$$

Η παράσταση $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ θεωρώντας ότι: $f(x)=\omega$ γίνονται $3\omega^2+2\beta\omega+\gamma$ που είναι θετική γιατί $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$.

Επίσης $3x^2-4x+6>0$ γιατί $\Delta=-56<0$.

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Επειδή $f'(x)>0$ δηλαδή $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f δεν έχει ακρότατα.

β. Επειδή $f'(x)>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Για $x=0$ έχουμε: $f(0)[f^2(0)+\beta f(0)+\gamma]=-1$ και επειδή $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma>0$ τότε $f(0)<0$.

Ομοίως για $x=1$ έχουμε ότι: $f(1)[f^2(1)+\beta f(1)+\gamma]=4$ δηλαδή $f(1)>0$

Οπότε $f(0)f(1)<0$ και από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0,1)$ για την εξίσωση $f(x)=0$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $(0,1)$ η f θα είναι (1-1) και η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 4

α) Θέτουμε $u=xt$

$$\text{Άρα: } du=x \cdot dt$$

$$u_1=x \cdot 0=0$$

$$u_2=x \cdot 1=x$$

$$\text{Θα έχουμε τότε: } f(x)=1-2\int_0^1x^2 \cdot t \cdot f^2(xt)dt=1-2\int_0^1x \cdot t f^2(xt)xdt$$

$$\text{Τότε } f(x)=1-2\int_0^xu \cdot f^2(u)du$$

$$\text{Και θα είναι } f'(x)=-2x \cdot f^2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0 \quad \text{Άρα η } g \text{ είναι σταθερή.}$$

γ) Από το (α) έχουμε ότι:

$$f'(x) = -2xf^2(x) \text{ δηλαδή } -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \quad \text{άρα } \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = 2x$$

$$\text{τότε } \int \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$$

$$\text{Ομοίως } f(0)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{0^2 + c} = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Δηλαδή θα είναι: } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\gamma) \text{ είναι } xf(x)\eta\mu 2x = x \frac{1}{x^2 + 1} \eta\mu 2x = \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x$$

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \text{ δηλαδή } -\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ τότε από το κριτήριο παραβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x = 0$$

Επιμέλεια: Δριμλής Βασίλης, μαθηματικός