

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Ονομάζουμε απόλυτη συχνότητα τον φυσικό αριθμό που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β) Αν διαιρέσουμε την συχνότητα v_i με το μέγεθος N προκύπτει η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i

$$\text{Δηλαδή } f_i = \frac{v_i}{N} \quad i=1,2,3 \dots K$$

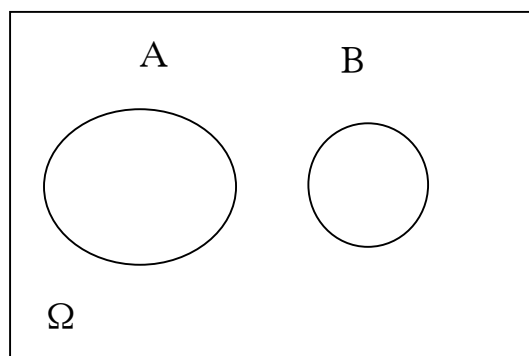
γ) i) $f_i = \frac{v_i}{N} \geq 0$ διότι $v_i \geq 0$

$$f_i = \frac{v_i}{N} \leq 1 \quad \text{διότι } v_i \leq N$$

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_K = \frac{v_1}{N} + \frac{v_2}{N} + \dots + \frac{v_K}{N} = \frac{v}{N} = 1$

B1. Αν $N(A)=K$ και $N(B)=\lambda$ τότε το $A \cup B$ έχει $K+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δεν θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλ. Έχουμε $N(A \cup B)=K+\lambda=N(A)+N(B)$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } P(A \cup B) &= \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \\ &= \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B) \end{aligned}$$



B2.α. Σε ένα πείραμα με n ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{k}{n}$

Γι' αυτό ορίζεται ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ο αριθμός

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

β. i) $P(\Omega)=1$

ii) $P(\emptyset)=0$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

α) $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{6}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

γ) $f'(x) = \frac{(2x)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot 2x}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - 1 \cdot 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ με $x \neq -1$

δ) Η ευθεία (ε) $\psi=2x+5$ έχει συντελεστή διεύθυνση $\lambda=2$.

Οι εφαπτόμενες της f που είναι παράλληλες στην (ε) θα είναι λόγω της παραλληλίας της μορφής $\psi=2x+\beta$ (1)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο ζητούμενο σημείο $M(x_0, f(x_0))$

θα είναι $f'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2}$ πρέπει

$$f'(x_0) = \lambda \Leftrightarrow \frac{2}{(x_0+1)^2} \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(x_0 + 2) = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

άρα τα σημεία επαφής είναι:

$$M_1(0, f(0)) = (0, 0)$$

$$M_2(-2, f(-2)) = (-2, 4)$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_1(0, 0)$ είναι της μορφής $\psi = 2x + \beta$ και επειδή το M_1 την επαληθεύει με αντικατάσταση βρίσκουμε $0 = 2 \cdot 0 + \beta$ με $\beta = 0$

άρα $(\varepsilon_1) \psi = 2x$

Η εφαπτομένη στο $M_2(-2, 4)$ είναι της μορφής $\psi = 2x + \beta$ και επειδή το M_2 την επαληθεύει με αντικατάσταση βρίσκουμε

$$4 = 2 \cdot (-2) + \beta \Rightarrow \beta = 8 \quad \text{Άρα } (\varepsilon_2) \psi = 2x + 8$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Βάζουμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά και έχουμε 8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

- Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=10$ άρτιος η διάμεσος θα είναι

$$\delta = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{13 + 14}{2} = 13,5$$

- Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{8+9+10+13+13+14+14+15+16+18}{10} = \frac{130}{10} = 13$

- Η επικρατούσα τιμή είναι $M_0 = 13$ και $M_0 = 14$ δηλαδή έχουμε δύο επικρατούσες τιμές.

β)

- εύρος $R = 18 - 8 = 10$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{10} = \frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + (14-13)^2 + (15-13)^2 + (16-13)^2}{10} = \frac{25 + 16 + 9 + 1 + 1 + 4 + 9 + 25}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

- $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{9} = 3$

- $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{3}{13} \approx 0,23$

Άρα ο συντελεστής μεταβολής είναι περίπου 23%

γ) Η έκπτωση 10% όλων των τιμών ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό όλων των

τιμών με $1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9$

Τότε ο $\bar{\psi} = 0,9 \cdot \bar{x}$

$$S_{\psi} = 0,9 \cdot S_x \quad \text{Άρα} \quad CV' = \frac{S_{\psi}}{\bar{\psi}} = \frac{0,9 \cdot S_x}{0,9 \cdot \bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = CV$$

Άρα παραμένει σταθερός.

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Από την σχέση: $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$

έχουμε: $P(A \cup B) + P(A \cap B) \neq 2P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$$

β) Είναι $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$

Τότε : $f'(x) = 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 =$

$$3[(x - P(A \cup B))^2 - (x - P(A \cap B))^2] =$$

$$3(x - P(A \cup B) + x - P(A \cap B))^2 (x - P(A \cup B) - x + P(A \cap B))$$

$$3 \cdot (P(A \cap B) - P(A \cup B)) \cdot [2x - (P(A \cup B) + P(A \cap B))]$$

Θα είναι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{P(A \cup B) + P(A \cap B)}{2} = \frac{P(A) + P(B)}{2}$

Επίσης $P(A \cap B) - P(A \cup B) < 0$ Διότι $A \cap B \subseteq A \cup B$ και $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{P(A)+P(B)}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{P(A)+P(B)}{2}, +\infty\right)$

Άρα στο $x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο.

γ) Θα είναι $P(A \cap B) = 0$

Τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Άρα: $f(P(A)) = [P(A) - P(B)]^3 - P(A)^3 = -(P(B))^3 - (P(A))^3$

$f(P(B)) = [P(B) - P(A) - P(B)]^3 - P(B)^3 = -[P(A)]^3 - [P(B)]^3$

Άρα $f(P(A)) = f(P(B))$

**Επιμέλεια: Βασίλης Δριμιλής , Πέτρος Ξηνταβελώνης ,
Γιώργος Ψωμάς – Μαθηματικοί**