

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ – Γ’
ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ : 1^ο

A. Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε :
 $G(x) = F(x) + c \quad (1)$

Από την (1) για $x=a$ έχουμε

$$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)dt + c \quad \text{οπότε : } c = G(a)$$

Επομένως $G(x) = F(x) + G(a)$

Οπότε για $x = \beta$ έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) = \int_a^\beta f(t)dt + G(a) \quad \text{και άρα} \quad \int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

B.1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} =$$

$$= \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} = \eta\mu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}$$

Επειδή $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0$

τότε έχουμε $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$ άρα $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

- B.2.** α) Λάθος
 β) Λάθος
 γ) Σωστό
 δ) Σωστό
 ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2Ο

$$f(v) = i^v \cdot z, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

α. $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3 \cdot z + i^8 \cdot z + i^{13} \cdot z + i^{18} z = -iz + z + iz - z = 0$

β. $f(13) = i^{13} \cdot z = iz = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$

γ. Έστω $O(0,0)$ η εικόνα του μιγαδικού 0, A η εικόνα του μιγαδικού z και B η εικόνα του μιγαδικού $f(13) = i^{13} \cdot z = iz$.

Έχουμε ότι $|z| = 2$ άρα $(OA) = 2$ και ότι η εικόνα του $f(13)$ προκύπτει αν περιστραφεί η διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}$ κατά γωνία $\pi/2$. Άρα ο $f(13)$ έχει διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OB}$ ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Τότε $E = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

ΘΕΜΑ 30

α. Επειδή η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι 1-1 θα έχουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ σχ(1)

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$g(x_1) = g(x_2) \text{ τότε } f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$$

και από την σχέση (1) έχουμε ότι: $x_1 = x_2$. Άρα η g είναι 1-1

β. Επειδή η g είναι 1-1 θα έχουμε ότι: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$

$$\Leftrightarrow f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x = 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$$

Έστω $h(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε ότι: $h'(x) = 3x^2 - 3$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$.

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και η h θα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$ το $h(-1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $h(1) = -1$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Όταν $x \in (-\infty, -1]$ η h έχει τιμές στο $(-\infty, 3]$ στο οποίο περιέχεται το 0 άρα έχει ρίζα μοναδική επειδή είναι γνησίως αύξουσα.

Όταν $x \in [-1, 1]$ τότε έχει τιμές στο $[-1, 3]$ στο οποίο περιέχεται το 0 άρα έχει ρίζα μοναδική γιατί είναι γνησίως φθίνουσα.

Όταν $x \in [1, +\infty)$ έχει τιμές στο $[-1, +\infty)$ στο οποίο περιέχεται το 0 άρα είναι ρίζα μοναδική γιατί είναι γνησίως αύξουσα.

Η ρίζα του διαστήματος $(-\infty, -1]$ είναι αρνητική, η ρίζα του διαστήματος $[1, +\infty)$ είναι θετική και η ρίζα του διαστήματος $[-1, 1]$ ανήκει ειδικότερα στο $(0, 1)$ γιατί ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[0, 1]$ επειδή η h έχει συνεχή σαν πολυωνυμική και $h(0) \cdot h(1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$

ΘΕΜΑ 4Ο

α. Θεωρώ $f(x) = h(x) - g(x)$ συνεχής στο $[a, \beta]$

Επειδή $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$

$$\int_a^\beta (h(x) - g(x)) dx > 0$$

$$\int_a^\beta h(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx > 0$$

$$\int_a^\beta h(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$$

β. i) Ισχύει $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$

Παραγωγίζοντας την σχέση (1) βρίσκουμε:

$$f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 1 \text{ και } f'(x) [1 + e^{-f(x)}] = 1, (1 + e^{-f(x)} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$$

Παρατηρώ ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ii) } f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{e^{f(x)} + 1}, \text{ η } f' \text{ παρ/μη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων}$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(e^{f(x)} + 1)^2}$$

Παρατηρώ ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Εφαρμόζω ΘΜΤ για την f στο $[0, x]$ με $x > 0$

- f συνεχής στο $[0, x]$

- f παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον

ένα:

$$x_0 \in (0, x): f'(x_0) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Όμως } 0 < x_0 < x \xrightarrow{f' \text{ γνησίως αύξουσα}} f'(0) < f'(x_0) < f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{f(0)}}{1 + e^{f(0)}} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$$

iii) Ισχύει $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$ για κάθε $x > 0$.

Παρατηρώ ότι για $x=0$ θα ισχύει σαν ισότητα.

$$\text{Δηλαδή: } 0 \leq \frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \cdot f'(x) \text{ για κάθε } x \geq 0$$

$$\text{Επειδή } f(x) - \frac{x}{2} \geq 0 \text{ και } xf'(x) - f(x) \geq 0 \text{ χωρίς να είναι παντού μηδέν στο } [0, 1]$$

Έχουμε

$$\int_0^1 \left| \frac{x}{2} \right| dx < \int_0^1 |f(x)| dx < \int_0^1 |xf'(x)| dx \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{διότι: } \frac{x}{2} > 0, \quad x \cdot f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x \cdot (f(x))' dx = \left[x \cdot f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - E$$

$$\text{Η ανίσωση γίνεται } \frac{1}{4} < E < f(1) - E$$

Το α' μέλος της ζητούμενης ισχύει

$$\text{Το β' μέλος: } E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{f(1)}{2}$$

$$\text{Τελικά } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$

**Επιμέλεια: Βασίλης Δριμιλής, Πέτρος Ξηταβελώνης,
Δημήτρης Τσόγιας - Μαθηματικοί**