

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΘΕΤΙΚΗ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Σχολικό βιβλίο σελ. 217
- B. Σχολικό βιβλίο σελ. 247
- Γ. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

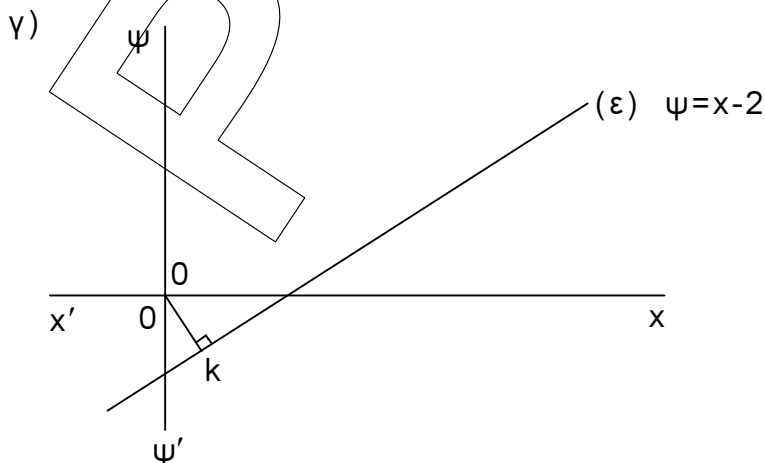
α) $w = 3z - i\bar{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 =$
 $= 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 =$
 $= (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$

Άρα $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$
 $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$

β) Τότε: $\left. \begin{array}{l} x = 3\alpha - \beta + 4 \\ \psi = 3\beta - \alpha \end{array} \right\} \text{ άρα ισχύει ότι:}$

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Rightarrow 4\beta - 4\alpha = -8 \Rightarrow \beta - \alpha = -2 \Rightarrow \beta = \alpha - 2$$

Άρα ο z ανήκει στην $\psi = x - 2$



Φέρνουμε από το Ο την κάθετη ΟΚ στην (ε)

Το $|z|$ θα είναι ελάχιστο όταν είναι $|z| = (OK)$. Θα υπολογίσω την εξίσωση της ευθείας ΟΚ

Είναι

$$(OK) : \psi = -x$$

$$\text{τότε: } \begin{cases} \psi = -x \\ \psi = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ άρα } K(1, -1). \text{ Δηλαδή } z_0 = 1 - i$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) $f(x) = x^2 + x^3 + x \quad x \in \mathbb{R}$

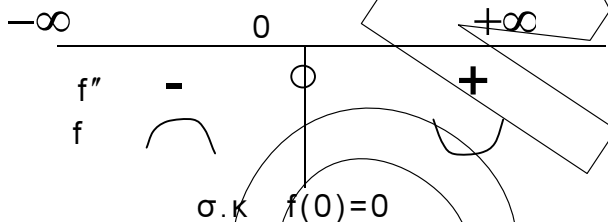
$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 20x^3 + 6x$$

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Άρα είναι (1-1) και αντιστρέφεται

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 + 6x = 0 \Rightarrow x(20x^2 + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 20x^3 + 6x > 0 \Rightarrow x > 0$$



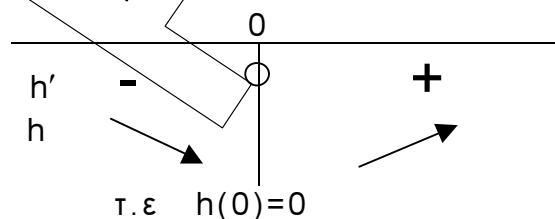
β) $f(e^x) \geq f(1+x) \xrightarrow{f \text{ γνησίως αύξουσα}} e^x \geq x+1$

Θεωρώ $h(x) = e^x - x - 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = e^x - 1$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$$



$$h(x) \geq h(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$$

γ) Η εφαπτομένη είναι: $\psi - f(0) = f'(0)(x - 0)$
 $\psi - 0 = 1(x - 0)$
 $\psi = x$

δ) $E = \int_0^3 |f^{-1}(x)| dx$

$$u = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du$$

$$x=0 \Rightarrow f^{-1}(0) = u_1 \Rightarrow u_1 = 0$$

$$\text{άρα } f^{-1}(0) = 0$$

$$\text{επίσης } f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1 = u_2$$

$$E = \int_0^1 |u| f'(u) du = \int_0^1 x(5x^4 + 3x^2 + 1) dx$$

$$= \int_0^1 (5x^5 + 3x^3 + x) dx = \left[\frac{5}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \delta]$ και $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ τότε θα υπάρξει τουλάχιστον μία ρίζα της $f(x) = 0$ στο (γ, δ) δηλαδή η $f(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β)

β) Έστω $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) > 0$, $f(\delta) < 0$

η είναι f συνεχής στο $[\gamma, \delta]$
 $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0 \Rightarrow$ άρα υπάρχει $x_0 \in (\gamma, \delta) : f(x_0) = 0$

τότε: $\alpha < \gamma < x_0 < \delta < \beta$

Επειδή ισχύει το ΘΜΤ στα $[\alpha, \gamma]$ και $[\gamma, x_0]$ για την $f(x)$

$$\text{υπάρχει } x_1 \in (\alpha, \gamma) : f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} > 0$$

$$\text{υπάρχει } x_2 \in (\gamma, x_0) : f'(x_2) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{x_0 - \gamma} < 0$$

Θα ισχύει το ΘΜΤ για την f' στο διάστημα $[x_1, x_2]$

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ έτσι ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

Επειδή ισχύει το ΘΜΤ στο $[x_0, \delta]$ και στο $[\delta, \beta]$ για την f

$$\text{Θα υπάρχει } x_3 \in (x_0, \delta) \text{ ώστε } f'(x_3) = \frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} = \frac{f(\delta)}{\delta - x_0} < 0$$

$$\text{Θα υπάρχει } x_4 \in (\delta, \beta) \text{ ώστε } f'(x_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} > 0$$

Θα ισχύει το ΘΜΤ στο $[x_3, x_4]$ για την f'

$$\text{Άρα υπάρχει } \xi_2 \in (x_3, x_4) \text{ ώστε } f''(\xi_2) = \frac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} > 0$$

- γ) Επειδή η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της $f''(x) = 0$ στο (ξ_1, ξ_2)
Άρα εκατέρωθεν μιας από τις ρίζες της $f''(x)$ θα μεταβάλλεται το πρόσημό της. Δηλαδή θα παρουσιάζει καμπή στη θέση αυτή.

Επιμέλεια: Δριμιλής Βασίλης, Τσόγιας Δημήτρης – Μαθηματικοί