

ΘΕΜΑ 1°

A. ΘΕΩΡΙΑ

B. ΘΕΩΡΙΑ

Γ. α → Σωστό

β → Σωστό

γ → Λάθος

δ → Λάθος

ε → Σωστό

ΘΕΜΑ 2°

A. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(0, +\infty)$ και θα έχουμε:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-1/2} \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [e^{-1/2}, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{-1/2} \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, e^{-1/2}]$$

$$\text{Άρα η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } x_0 = e^{-1/2} \text{ το } f(e^{-1/2}) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1/2} = -\frac{1}{2} e^{-1} = -\frac{1}{2e}$$

B. Θα έχουμε $f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 1 + 2 = 2 \ln x + 3$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-3/2}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-3/2} \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή στο } [e^{-3/2}, +\infty)$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < e^{-3/2} \text{ άρα η } f \text{ είναι κοίλη στο } (0, e^{-3/2}]$$

$$\text{άρα παρουσιάζει καμπή στο } x_0 = e^{-3/2} \text{ με } f(e^{-3/2}) = e^{-3} \cdot \ln e^{-3/2} = -\frac{3}{2} e^{-3}$$

Γ. Θα έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} x^2 \right) = 0$$

$$\text{επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot \ln x) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$A1 = (0, e^{-1/2}] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f=\gamma\eta\sigma.\phi\theta\iota\nu\omicron\upsilon\sigma\alpha} f(A1) = [f(e^{-1/2}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [-\frac{1}{2e}, 0)$$

$$A2 = [e^{-1/2}, +\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f=\gamma\eta\eta\sigma.\acute{\alpha}\upsilon\chi\omicron\upsilon\sigma\alpha} f(A2) = [f(e^{-1/2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-\frac{1}{2e}, +\infty)$$

$$\text{Άρα } f(A) = f(A1) \cup f(A2) = [-\frac{1}{2e}, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 3°

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]$

α) Στο διάστημα $[0, \frac{3}{2}]$ εφαρμόζεται το Θ. Rolle για την συνάρτηση g διότι

- g συνεχής στο $[0, \frac{3}{2}]$
- g παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3}{2})$
- $\left. \begin{array}{l} g(0) = e^0 \cdot f(0) = 0 \\ g(\frac{3}{2}) = e^{3/2} \cdot f(\frac{3}{2}) = 0 \end{array} \right\} g(0) = g(\frac{3}{2})$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$

$$\begin{aligned} \beta) I(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 g(x) = \int_{\alpha}^0 e^x \cdot (2x^2 - 3x) dx = \left[e^x (2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3) dx = \\ &= \left[e^x (2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \left[e^x (4x - 3) \right]_{\alpha}^0 + \left[e^x \cdot 4 \right]_{\alpha}^0 = \\ &= 0 - e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - [-3 - e^{\alpha} (4\alpha - 3)] + 4 - 4e^{\alpha} = \\ &= 0 - e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^{\alpha} (4\alpha - 3) + 4 - 4e^{\alpha} = \\ &= e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3 - 4) + 7 = e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7 \end{aligned}$$

$$\gamma) \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7]$$

$$\text{όμως } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} [e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7]^{0 \cdot (+\infty)} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} =$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{4\alpha - 7}{e^{-\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{4}{-e^{-\alpha}} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (-4 \cdot e^{\alpha}) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = 0 + 7 = 7$$

ΘΕΜΑ 4°

A) Το $|z| \in \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $\int_1^x |z| f(t) dt$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Το x^3 παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως η $\int_1^{x^3} |z| f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων.

$\left| z + \frac{1}{z} \right| \in \mathbb{R}$ και $x-1$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Δηλαδή η $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων, με

$$g'(x) = 3|z|x^2 f(x^3) - 3\left| z + \frac{1}{z} \right| \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

B) Η $g(x) = \int_1^x |z| \cdot f(t) dt - 3\left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0$ για $x \in \mathbb{R}$

$$\text{με } g(1) = \int_1^1 |z| \cdot f(t) dt - 3\left| z + \frac{1}{z} \right| (1-1) = 0. \text{ Άρα } g(x) \geq g(1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αφού η g παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ που είναι εσωτερικό σημείο του π.ο της και θέση ακροτάτου τότε από θεώρημα Fermat η $g'(1) = 0 \Leftrightarrow 3|z| \cdot 1 \cdot f(1) - 3\left| z + \frac{1}{z} \right| = 0 \Leftrightarrow 3|z| = 3\left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

Γ) Αφού $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$ τότε $|z|^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2$ δηλαδή $z \cdot \bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \Leftrightarrow$

$$z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow 0 = \frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow 0 = z^2 + (\bar{z})^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 + (\bar{z}^2) = -1 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

Δ) Το $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$ από (γ) το $\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$ όμως $\alpha - \beta > 0$ αφού $\alpha > \beta$ δηλαδή $\alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha$ και επειδή $\alpha > 0$, $-\alpha < 0$

άρα $\beta < -\alpha < 0$

τότε $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta < 0$ άρα $f(2) \cdot f(3) < 0$ f συνεχής στο $[2, 3]$

Από Θ Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ $f(x_0) = 0$

Επιμέλεια: Δριμλής Βασίλης, Ξηνταβελώνης Πέτρος, Τσόγιας Δημήτρης, μαθηματικοί