

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

A.1. Σχολικό βιβλίο

A.2. $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0.$

B.α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

στ) Σωστό

ΘΕΜΑ 2

α) $|z_1| = 3$ τότε $|z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β) $W = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ αρκεί να δείξω ότι: $\bar{W} = W$

$$\bar{W} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = W$$

$$\begin{aligned} \gamma) |z_1 + z_2 + z_3| &= |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3}{z_1 z_2 z_3} \right| = \\ &= \frac{9 |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{|z_1 z_2 z_3|} = 9 \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3

$f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$ τότε $A_f = \mathbb{R}$

α) f παραγωγίσιμη ως σύνθεση με $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη (ε) εξίσωση της εφαπτομένης $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ αφού διέρχεται από το $O(0,0)$ τότε

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0)$$

$$-f(x_0) = -f'(x_0) \cdot x_0$$

$$e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} x_0, e^{\lambda x} \neq 0$$

$$1 = \lambda x_0 \quad \lambda > 0 \quad \text{άρα} \quad x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{οπότε } f(x_0) = e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = e$$

$$f'(x_0) = \lambda e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = \lambda \cdot e$$

$$\text{άρα } (\varepsilon): y - e = \lambda e(x - \frac{1}{\lambda})$$

$$(\varepsilon): y - e = \lambda e x - e$$

$$(\varepsilon): y = \lambda e x$$

$$\text{σημείο επαφής, } M(\frac{1}{\lambda}, e)$$

γ) $f''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε η εφαπτομένη (ε) είναι κάτω από την C_f (εκτός από το σημείο επαφής) άρα $f(x) \geq \lambda e x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_0^1 |f(x) - \lambda e x| dx = \int_0^1 (f(x) - \lambda e x) dx = \int_0^1 (e^{\lambda x} - \lambda e x) dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \lambda e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{e - 2}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$\delta) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{e-2}{2} \lambda}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{e-2}{2}}{\frac{2}{\lambda} + \eta \mu} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{e-2}{2}}{\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda}} \quad (1)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\lambda} = 0$$

$$\left| \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \right| = \frac{|\eta \mu \lambda|}{|\lambda|} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ αφού } \lambda > 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \text{ άρα } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} = 0 \text{ άρα } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \right) = 0$$

$$\frac{2 + \eta \mu \lambda}{\lambda} > 0 \text{ για κάθε } \lambda > 0 \text{ αφού } \eta \mu \lambda + 2 > 0 \text{ άρα } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda}} = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{e-2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda}} = \frac{\frac{e-2}{2} (+\infty)}{2} = +\infty \text{ αφού } \frac{e-2}{2} > 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha) 2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2e^{f(x)})' = (e^x)'$$

άρα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $2e^{f(x)} = e^x + c$

Αν $x=0$: $2 \cdot e^{f(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow c=1$

$$2 \cdot e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2} \quad \left(\frac{e^x + 1}{2} > 0 \right)$$

β) $g(x) = \int_0^x f(x-t) dt$

Θέτω $x-t=u \Leftrightarrow t=x-u$ άρα $dt=-du$

Αν $t=x$ τότε $u=0$ και αν $t=0$ τότε $u=x$ Άρα $g(x) = \int_x^0 f(u) \cdot (-du) = \int_0^x f(u) du$

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ αφού g συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x} = \frac{f(0)}{\sin 0} = \frac{0}{1} = 0 \text{ αφού } f \text{ συνεχής}$$

γ) Θεωρώ $\Pi(x) = h(x) - g(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt - \frac{x^{2007}}{2007} = - \int_0^{-x} t^{2005} \cdot f(t) dt + \int_0^x f(t) \cdot t^{2005} dt - \frac{x^{2007}}{2007}$
με $x \in \mathbb{R}$

Αρκεί $\Pi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ [Αρκεί $\Pi'(x) = 0$ άρα $\Pi(x) = c$ και $c=0$]

$$\begin{aligned} \Pi'(x) &= -(-x)^{2005} \cdot f(-x) \cdot (-1) + f(x) \cdot x^{2005} - x^{2006} = -x^{2005} \cdot f(-x) + f(x) \cdot x^{2005} - x^{2006} = \\ &= -x^{2005} \cdot \ln \frac{e^{-x} + 1}{2} + x^{2005} \cdot \ln \frac{e^x + 1}{2} - x^{2006} = x^{2005} \cdot \ln \frac{2}{e^{-x} + 1} - x^{2006} = \end{aligned}$$

$$= x^{2005} \cdot \ln e^x - x^{2006} = x^{2006} - x^{2006} = 0 \text{ Δηλαδή } \Pi(x) = c$$

Αν $x=0$ τότε $\Pi(0)=0$, $c=0$ και $\Pi(x)=0$

δ) Λόγω της (γ) θεωρώ $T(x) = \frac{x^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008}$

Ύπαρξη ρίζας στο $(0,1)$

- T συνεχής στο $[0,1]$ ως πολ/κή
- $T(0) = -\frac{1}{2008} < 0$
- $T(1) = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0$

$T(0) \cdot T(1) < 0$ άρα από το Θ. Bolzano στο $[0, 1]$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$:
 $T(x_0) = 0$

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΡΙΖΑΣ

$T'(x) = x^{2006} > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Άρα T γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ και κατά συνέπεια η ρίζα x_0 είναι μοναδική

Επιμέλεια: Δριμιλής Βασίλης, Ξηταβελώνης Πέτρος, Τσόγιας Δημήτρης- Μαθηματικοί

ΣΧΟΛΙΟ

Τα θέματα καλύπτουν μεγάλο θέμα της ύλης. Ήταν με διαβαθμισμένη δυσκολία και απαιτούσαν άριστο χειρισμό και γνώσεις σε λεπτομέρεια κυρίως των ορίων και παραγώγων.

Σε σχέση με προηγούμενες χρονιές ήταν πιο ποιοτικά και υψηλότερου επιπέδου. Απαιτούσαν και αλγεβρικές πράξεις, ιδιότητες, κυρίως λογαρίθμων που διδάσκεται στη Β Λυκείου.

Ξηταβελώνης Πέτρος