

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A1. Σχολικό βιβλίο

A2. Σχολικό βιβλίο

B. α.Λ, β.Σ, γ.Σ, δ.Λ ε.Σ

ΘΕΜΑ 2

$$f(x)=2+(x-2)^2=x^2-4x+6 \quad x \geq 2$$

α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x-4 \quad x \geq 2$

Άρα $f'(x)=2(x-2)>0$ για κάθε $x>2$

και επειδή f συνεχής στο $[2, +\infty)$

Η f γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$

Άρα η f είναι "1-1" στο στο $[2, +\infty)$

$$f(x) = \psi \left\{ \begin{array}{l} 2 + (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{array} \right. = \psi \left\{ \begin{array}{l} (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{array} \right. = \psi - 2 \left\{ \begin{array}{l} \\ x \geq 2 \end{array} \right.$$

$$x-2 = \sqrt{\psi-2}, \quad x = \sqrt{\psi-2} + 2 \text{ δεκτή}$$

με $\psi \geq 2$ έχουμε:

$$x-2 = -\sqrt{\psi-2}, \quad x = -\sqrt{\psi-2} + 2 \text{ απορ.}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2} \text{ με } x \geq 2$$

γ.

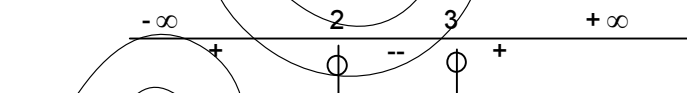
$$i) f(x)=x \Leftrightarrow 2+(x-2)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2-(x-2)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$x=2 \text{ ή } x=3$$

Άρα κοινά σημεία των f, f^{-1} , $\psi=x$ τα $M_1(2,2)$ $M_2(3,3)$

ii) Το ζητούμενο εμβαδό είναι διπλάσιο του εμβαδού ανάμεσα f και $\psi=x$

$$E' = \int_2^3 |f(x) - \psi| dx = \int_2^3 |x^2 - 5x + 6| dx$$



$$x^2-5x+6 < 0 \text{ για κάθε } x \in [2, 3]$$

$$E' = - \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx =$$

$$= - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_2^3 =$$

$$= - \left(9 - \frac{45}{2} + 18 \right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 \right) =$$

$$= -27 + \frac{45}{2} + \frac{8}{3} + 2 =$$

$$= -25 + \frac{45}{2} + \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{-150 + 135 + 16}{6} = \frac{1}{6} \text{ τ.μ.} \quad \text{Άρα } E = 2E' = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3

α) Έστω $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow (z_1 = -z_2 - z_3)$

$$\Leftrightarrow |-2z_2 - z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2)$$

$$4z_2\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_3 =$$

$$= 4z_3\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_2 + 2\bar{z}_3z_2 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|z_2|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ που ισχύει}$$

Όμοια $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow 3 = 3 \text{ που ισχύει}$

ii) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$

Άρα $|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \quad (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4$

$$z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \leq 4$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) \leq 4$$

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 \geq -2$$

$$2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 \quad \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$$

β) Λόγω του $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και $R=1$

Λόγω του $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ οι εικόνες τους ισαπέχουν μεταξύ τους άρα ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

α) Πρέπει

- $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
- $x > 0$

άρα $\Delta_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ_f με $f'(x) = -\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$

Παρατηρώ ότι $f'(x) < 0, \forall x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$

Άρα προκύπτει ο πίνακας

x	0	1	$+\infty$
f'	-	-	
f			

Για το σύνολο τιμών θα υπολογίσω τα όρια της f $A_f = (0,1)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty$$

$$A_2 = (1,+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty$$

άρα $R_f = \mathbb{R}$

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ με $R_f = \mathbb{R}$.

Παίρνει την τιμή 0, άρα έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ με $R_f = \mathbb{R}$.

Παίρνει την τιμή 0, άρα έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,+\infty)$

γ) $g(x) = \ln x, x > 0$ με $g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

$h(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ με $h'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

$(\varepsilon_A): y - g(a) = g'(a)(x - a)$

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$$

$$y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$$

$(\varepsilon_B): y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta)$

$$y - e^\beta = e^\beta(x - \beta)$$

$$y = e^\beta x + e^\beta - e^\beta \beta$$

Αφού ταυτίζονται ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{a} = e^\beta \\ \ln a - 1 = e^\beta - e^\beta \beta \end{array} \right\} \beta = -\ln a \left. \begin{array}{l} \beta = -\ln a \\ \ln a - 1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \end{array} \right\} \beta = -\ln a \left. \begin{array}{l} \beta = -\ln a \\ \ln a = \frac{a+1}{a-1} \end{array} \right\} \frac{a+1}{a-1} - \ln a = 0$$

Δηλαδή $f(a)=0$ και κατά συνέπεια το a είναι ρίζα της f .

δ) Από το γ ερώτημα έχουμε ότι αν έχουν κοινή εφαπτομένη σε σημεία $A(\alpha, \ln \alpha)$, $B(\beta, e^\beta)$ το α είναι ρίζα της f .

Η f όμως ισχύει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 άρα υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $A_1(x_1, \ln x_1)$, $A_2(x_2, \ln x_2)$

στα οποία οι εφαπτομένες της h στα αντίστοιχα σημεία $B_1(-\ln x_1, \frac{1}{x_1})$ και $B_2(-\ln x_2, \frac{1}{x_2})$