

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ – Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

- A.1 Θεωρία
A.2 Θεωρία ορισμός
A.3 Θεωρία ορισμός

B) $\alpha - \Lambda$, $\beta - \Lambda$, $\gamma - \Lambda$, $\delta - \Sigma$, $\varepsilon - \Sigma$

ΘΕΜΑ 2°

$$\alpha) |z| = \left| \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i} \right| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$$

$$\beta) \text{ Αν } \alpha=0, \quad z_1 = \frac{1}{i} = -i$$

$$\text{Αν } \alpha=2, \quad z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$$

$$i) \quad |z_1 - z_2| = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$ii) \quad \left. \begin{aligned} (z_1)^{2\nu} &= (-i)^{2\nu} = i^{2\nu} = (-1)^\nu \\ (-z_2)^\nu &= (-1)^\nu \end{aligned} \right\} \text{ ΙΣΧΥΕΙ}$$

ΘΕΜΑ 3°

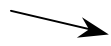
$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta \quad \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ κρίσιμο σημείο} \\ x = 1 \text{ κρίσιμο σημείο} \end{cases}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

$$\text{T.M το } f(-1) = -1 + 3 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$\text{T.E το } f(1) = 1 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$$

ΚΟΙΛΑ – ΚΥΡΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ πιθανό σημείο καμπής}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

Άρα σημείο καμπής στο $f(0) = -2\eta\mu^2\theta$

β) Θα βρω τα όρια της f στο $-\infty$ και στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

- Αν $x \in A_1 = (-\infty, -1]$: f γνησίως αύξουσα με $f(A_1) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Η f παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

- Αν $x \in A_2 = [-1, 1]$: f γνησίως φθίνουσα με $f(A_2) = [-2(1+\eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Η f παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

- Αν $x \in A_3 = [1, +\infty)$: f γνησίως αύξουσα με $f(A_3) = [-2(1+\eta\mu^2\theta), +\infty)$

Η f παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

γ) $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$

$\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

πρέπει τα σημεία να επαληθεύουν την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

για το Α: $2\sigma\upsilon\nu^2\theta = -2 \cdot (-1) - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$ ισχύει

για το Β: $-2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta$ ισχύει

για το Γ: $-2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$ ισχύει

δ) Θα βρω τα κοινά σημεία των f, y

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$E = \int_{-1}^1 |f(x) - y| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx$$

το πρόσημο της $x^3 - x$ είναι:

-∞	-1	0	1	∞
-	+	-	+	-

Άρα:

$$E = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (-x^3 + x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4°

α) Για κάθε $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) > 0$

άρα $f(x)g(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

β) Για $0 < t < x \leq 1 \Rightarrow f(t) < f(x) \Leftrightarrow f(t)g(t) < f(x)g(t) \Leftrightarrow g(t)[f(x) - f(t)] > 0$

άρα

$$\int_0^x g(t)[f(x) - f(t)] dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t)f(x) dt - \int_0^x g(t)f(t) dt > 0 \Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t) dt > \int_0^x g(t)f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x) > F(x)$$

γ) θεωρώ $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ στο $(0,1]$

$$h'(x) = \frac{F'(x)G(x) - G'(x)F(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x)G(x) - g(x)F(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x)[f(x)G(x) - F(x)]}{G^2(x)} > 0$$

άρα η γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

$\forall x \leq 1 \Rightarrow h(x) \leq h(1)$

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t) dt \cdot \int_0^{x^2} \eta \mu^2 dt}{\int_0^x g(t) dt \cdot x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu^2 dt}{x^5} \right]$$

$$\text{Ομως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu^2 dt}{x^5} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot x \right) = 0$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt \cdot \int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{\int_0^x g(t)dt \cdot x^5} = 0$$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Ξηνταβελώνης Πέτρος, Μαθηματικός
Δριμιλής Βασίλης, Μαθηματικός
Τσόγιας Δημήτριος, Μαθηματικός

Τα θέματα των Πανελληνίων Εξετάσεων στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης ήταν σωστά διατυπωμένα και δεν άφηναν αμφιβολίες. Ήταν κλιμακωτής δυσκολίας και με σκοπό να μπορεί ο μαθητής σχετικά εύκολα να περάσει την βάση.

Ένας μαθητής ενημερωμένος μπορούσε με άνεση να φτάσει το 15/20 λύνοντας και το τρίτο θέμα.

Στο 4^ο θέμα το β' ερώτημα (που μετρούσε 6 μόρια) ήταν αρκετά δύσκολο και εκεί θα δώσει την ευκαιρία στον πολύ καλό μαθητή να ξεχωρίσει.

Σε σχέση πάντως με τις προηγούμενες χρονιές ήταν πιο εύκολα.

Ξηνταβελώνης Πέτρος, Μαθηματικός
Παπαγεωργίου Γεώργιος, Μαθηματικός