

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο:

A. Θεωρία από σχολικό βιβλίο, σελ. 28

B. Θεωρία από σχολικό βιβλίο, σελ. 96

Γ.

$\alpha \rightarrow \Lambda$

$\beta \rightarrow \Lambda$

$\gamma \rightarrow \Sigma$

$\delta \rightarrow \Sigma$

$\varepsilon \rightarrow \Sigma$

Θέμα 2^ο:

A. Είναι: $\frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

B. Είναι: $f'(x) = \frac{(x-1)'e^x - (e^x)'(x-1)}{(e^x)^2} = \frac{e^x - e^x(x-1)}{e^{2x}} = \frac{e^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

Άρα $e^x f'(x) = e^x \frac{2-x}{e^x} = 2-x$

Γ. Έχουμε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	+	-	
f			

Ηf παραγωγίσιμη $(-\infty, 2]$
 $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 2)$ $\Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$

Ηf παραγωγίσιμη $[2, +\infty)$
 $f'(x) < 0$ στο $(2, +\infty)$ $\Rightarrow$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Άρα για $x = 2$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(2) = \frac{1}{e^2}$.

Θέμα 3^ο:

Α. Για τη μέση διάρκεια ζωής $\bar{X}_A$ των μπαταριών τύπου Α έχουμε:

$$\bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{v} = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ χιλιάδες ώρες.}$$

Για τη μέση διάρκεια ζωής $\bar{X}_B$ των μπαταριών τύπου Β έχουμε:

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{v} = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ χιλιάδες ώρες.}$$

Β. Για να επιλέξουμε ποιον τύπο μπαταρίας μας συμφέρει να αγοράσουμε αρκεί να συγκρίνουμε τους λόγους τιμής αγοράς ανά μέση διάρκεια ζωής (κόστος / μονάδα χρόνου).

$$\text{Για τις μπαταρίες τύπου Α: } \lambda_1 = \frac{38}{22} \approx 1,73.$$

$$\text{Για τις μπαταρίες τύπου Β: } \lambda_2 = \frac{40}{24} \approx 1,67.$$

Επειδή $\lambda_2 < \lambda_1$ μας συμφέρει να αγοράσουμε μπαταρίες τύπου Β.

Γ.

Η διακύμανση S_A^2 των μπαταριών τύπου Α είναι:

$$\begin{aligned} S_A^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{X}_A)^2}{v} = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} = \\ &= \frac{4+16+4+0+16}{5} = \frac{40}{5} = 8 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } S_A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ χιλιάδες ώρες.}$$

Η διακύμανση S_B^2 των μπαταριών τύπου Β είναι:

$$\begin{aligned} S_B^2 &= \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{X}_B)^2}{v} = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} = \\ &= \frac{4+64+25+16+1}{5} = \frac{110}{5} = 22 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } S_B = \sqrt{22} = \sqrt{2}\sqrt{11} \text{ χιλιάδες ώρες.}$$

Δ. Για να βρούμε ποιος από τους τύπους των μπαταριών παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια πρέπει να βρούμε τους συντελεστές μεταβολής. Έτσι έχουμε:

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{X}_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}$$

και

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{11}\sqrt{2}}{24} = \frac{3,3\sqrt{2}}{24}$$

$$\text{Ο λόγος } \frac{CV_A}{CV_B} \text{ είναι } \frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{3,3\sqrt{2}}{24}} = \frac{24\sqrt{2}}{11 \cdot 3,3\sqrt{2}} = \frac{24}{36,3} < 1.$$

Άρα: $CV_A < CV_B$ οπότε οι μπαταρίες τύπου Α παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Θέμα 4^ο:

Έστω

A: διαβάζει εφημερίδα α

B: διαβάζει εφημερίδα β

$$\text{Άρα } P(A)=0,5$$

$$P(A-B)=0,3$$

$$\alpha) P(A' \cup B)=;$$

$$P(A-B)=0,3 \Leftrightarrow P(A)-P(A \cap B)=0,3 \Leftrightarrow 0,5-P(A \cap B)=0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B)=0,2$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0,5 + 0,2 = 0,7 \end{aligned}$$

$$\beta) \text{ Αφού } A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$$

$$0,2 \leq P(B)$$

$$\frac{1}{5} \leq P(B)$$

$$\text{Αφού } P(A \cup B) \leq 1$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

$$P(A-B) + P(B) \leq 1$$

$$0,3 + P(B) \leq 1$$

$$P(B) \leq 0,7$$

$$P(B) \leq \frac{7}{10}$$

$$\text{ή αφού } B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A \cup B) \Rightarrow P(B) \leq 0,7$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

$$\gamma) f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$$

$$\Delta = 1 - 12P(B)$$

$$\text{Και αφού } \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Rightarrow \Delta < 0$$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f = \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

**Επιμέλεια: Λασκαρίδης Μιχάλης, Αντωνιάδης Ανδρέας,
Παπαγεωργίου Γιώργος, Μαθηματικοί**

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

Τα θέματα ήταν στο πνεύμα των Πανελλαδικών εξετάσεων των τελευταίων ετών.

Μπορούσε να ελεγχθεί αν οι υποψήφιοι ήταν επαρκώς διαβασμένοι και σε κάποια ερωτήματα η κριτική ικανότητά τους.

Η κλιμακούμενη δυσκολία τους επέτρεπε σε μεγάλο αριθμό υποψηφίων να γράψουν ικανοποιητικά.