

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Θεωρία

Α.2. Θεωρία

Β.α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ 2

$$\alpha) |(i+2\sqrt{2}) \cdot z| = 6 \Leftrightarrow |i+2\sqrt{2}| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+8} \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

$$\beta) |w - (1-i)| = |w - (3-3i)|$$

$$\text{Θέτω } w=x+\psi i. \text{ Τότε έχουμε: } |(x-1)+(\psi+1)i| = |(x-3)+(\psi+3)i|$$

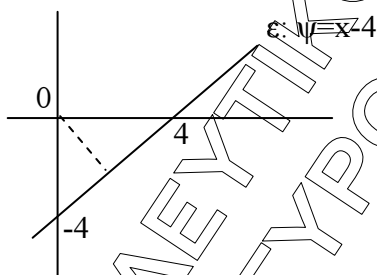
$$\text{Άρα έχουμε } \sqrt{(x-1)^2 + (\psi+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (\psi+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + \psi^2 + 2\psi + 1 = x^2 - 6x + 9 + \psi^2 + 6\psi + 9 \Leftrightarrow$$

$$4x - 4\psi - 16 = 0 \Leftrightarrow x - \psi - 4 = 0 \Leftrightarrow \psi = x - 4$$

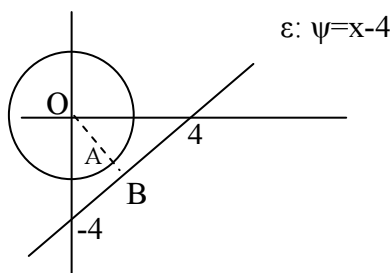
Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ευθεία (ε): $\psi = x - 4$

γ) Το $|w|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση της εικόνας του w από το $O(0,0)$



$$\text{Άρα } |w|_{\min} = d(O, \varepsilon) = \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

δ) Το $|z - w|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα w .



Επειδή $|w| > R$ η ευθεία είναι εξωτερική του C.

$$|z - w|_{\min} = AB = (OB) - (OA) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

ΘΕΜΑ 3

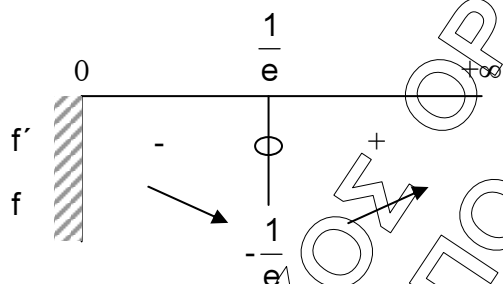
$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα f συνεχής στο $x_0 = 0$

β) Για κάθε $x > 0$: $f(x) = x \ln x$ με $f'(x) = \ln x + 1$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$



$$\text{Ελάχιστη τιμή } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

$$\text{Θα υπολογίσω το όριο της f στο } +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$$

$$\text{Άρα } R_f = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right)$$

$$\gamma) x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

(Π₁) Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$: η εξίσωση είναι αδύνατη

(Π₂) Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$: η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x_0 = \frac{1}{e}$

(Π₃) Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$: η εξίσωση έχει δύο θετικές ρίζες. (μία σε καθένα από τα

διαστήματα $(0, \frac{1}{e})$ και $(\frac{1}{e}, +\infty)$)

(Π₄) Αν $a \geq 0$: η εξίσωση έχει ρίζα το 0 (απορρίπτεται) και μοναδική θετική ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{e}, +\infty)$

δ) Στο $[x, x+1]$ με $x > 0$ η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ στο $(x, x+1)$: $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Τότε $\xi < x+1 \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$

ΘΕΜΑ 4

α) $f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$

Τότε $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left[(10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt \right] dx - \int_0^2 45 dx$

$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(t) dt \int_0^2 (10x^3 + 3x) dx - 90$

$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \left[\frac{5}{2} x^4 + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 - 90$

$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \cdot 46 - 90$

$45 \int_0^2 f(x) dx = 90 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 2$

Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot 2 - 45$

$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

β) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x-h) - g'(x)}{-h} \stackrel{u=-h}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x)$

γ)

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} \stackrel{DLH}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} - \frac{g'(x-h) - g'(x)}{2h} \right] = \frac{g''(x)}{2} + \frac{g''(x)}{2} = g''(x)$

Άρα $g''(x) = f(x) + 45$

$g''(x) = 20x^3 + 6x$

Άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \alpha$

$g(x) = x^5 + x^3 + \alpha x + \beta$

Όμως $g'(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$g(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$

Τελικά $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii) $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα g γνησίως αύξουσα και $1 - 1$

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

Τα θέματα ήταν για πολύ ενημερωμένους και με ελάχιστη διαφορά στη διαβάθμιση τους. Χρειαζόταν προσοχή στη διατύπωση τους και άριστη γνώση των εννοιών και χρήση των ορίων.

Ομάδα Μαθηματικών Εκπαιδευτικού Οργανισμού "ΡΟΜΒΟΣ"

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΡΟΜΒΩΝ
ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ - ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ