

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο:

Α. Θεωρία, σελίδα 150 του σχολικού βιβλίου

Β. Θεωρία, σελίδα 65 του σχολικού βιβλίου

Γ.

$\alpha - \Lambda$

$\beta - \Sigma$

$\gamma - \Lambda$

$\delta - \Sigma$

$\varepsilon - \Sigma$

ΘΕΜΑ 2^ο:

α.

x_i	v_i	$v_i x_i$
2	6	12
3	$x = 7$	$21 = 3x$
5	3	15
8	4	32
	$v = 20$	$3x + 59$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = 4 \Leftrightarrow 3x + 55 = 4v \Rightarrow 3x + 59 = 4x + 52 \Leftrightarrow x = 7 = v_2$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v$$

β.

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{(2-4)^2 6 + (3-4)^2 7 + (5-4)^2 3 + (8-4)^2 4}{20} = \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \frac{98}{20} = 4,9$$

γ. Για $\bar{x} = 4 > 0$ και $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4,9} \approx 2,2$ έχουμε ότι

$$S \approx 2,2 \Rightarrow CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,2}{4} = \frac{11}{20} = 0,55 = 55\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα των τιμών της μεταβλητής x δεν είναι ομοιογενές, διότι $CV > 10\%$.

ΘΕΜΑ 3^ο:

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

άρα έχουμε:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$$

$$2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2$$

$$12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2$$

$$\alpha = 9$$

β.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(1-3)}{1+1} = -3$$

γ.

H (ε) : y = λx + β εφαπτόμενη της C_f στο A(x₀, f(x₀))

H (ε) // (η) : y = -3x και λ_η = -3, οπότε λ_ε = λ_η = -3

Άρα

$$\lambda = f'(x_0) = -3$$

$$3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3$$

$$x_0^2 - 4x_0 + 3 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0$$

$$(x_0 - 2)^2 = 0$$

$$x_0 = 2$$

$$\text{Το } A(2, f(2)) \in (\varepsilon) \Rightarrow f(2) = -3 \cdot 2 + \beta = -6 + \beta \Rightarrow 1 = \beta, \text{ άρα}$$

$$(\varepsilon): y = -3x + 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο:

A.

$$\alpha. f'(x) = \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$H \left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ στο } (0,2) \\ f = \text{παρ/μη στο } (0,2] \end{array} \right| \rightarrow \eta f \text{ είναι } \uparrow \text{ στο } (0,2]$$

$$H \left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ στο } (2,+\infty) \\ f = \text{παρ/μη στο } [2,+\infty) \end{array} \right| \rightarrow \eta f \text{ είναι } \downarrow \text{ στο } [2,+\infty)$$

x	0	2
f'	+	○
f	↗	↘

β.

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x \leq 2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) \leq f(2) \\ x \geq 2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) \leq f(2) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(2), \text{ άρα για } x \neq 2 \text{ η } f \text{ έχει μέγιστο το}$$

$$f(2) = \ln_2 - \frac{2}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$$

$$f(2) = \ln_2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$$

B. α.

$$\text{Αφού } 2 < 3 < 4 < 5 < 8 \xrightarrow{f \downarrow \text{ στο } [2, +\infty]} f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$$

$$\text{Άρα } R = f(2) - f(8) = \ln_2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 - 3\ln 2 - \lambda^2 + 6\lambda + 2 \text{ οπότε}$$

$$R = 3 - 2\ln 2 = 3 + \ln 2^{-2} = 3 + \ln \frac{1}{4}$$

$$v = 5 \Rightarrow \delta = t_3 = f(4) = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

β.

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

$$R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 2 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 2 + 2\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$\lambda = \frac{6 \pm 4}{2} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \text{ή} \\ \lambda = 1 \end{array} \right.$$

λ	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$\lambda^2 - 6\lambda + 5$		○	○	
	+		-	+

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \in (1, 5) \\ \lambda \in \Omega \end{array} \right| \rightarrow \lambda = 2, 3, 4 \text{ άρα } A = \{2, 3, 4\} \Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 0,03$$

Επιμέλεια: Αντωνιάδης Ανδρέας, Μαθηματικός
 Λάμπρου Σπύρος, Μαθηματικός
 Τσόγιας Δημήτρης, Μαθηματικός

ΣΧΟΛΙΟ

Τα θέματα ήταν βατά με κλιμακούμενη δυσκολία. Οι μαθητές μπορούσαν εύκολα να φτάσουν στο 50/100. Στο 4^ο θέμα υπήρχε μια μικρή δυσκολία στη διάταξη των τιμών $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(8)$, αφού θα έπρεπε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν την μονοτονία της συνάρτησης f .

Συμπερασματικά οι μαθητές δεν πρέπει να συνάντησαν ιδιαίτερη δυσκολία στη λύση των θεμάτων.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΠΟΜΠΟΥΚΩΝ
ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ - ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ