

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ – ΘΕΤΙΚΗΣ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Θεωρία

**B.** Θεωρία

**Γ.**

$\alpha$  – ΣΩΣΤΟ

$\beta$  – ΣΩΣΤΟ

$\gamma$  – ΛΑΘΟΣ

$\delta$  – ΛΑΘΟΣ

$\epsilon$  – ΛΑΘΟΣ

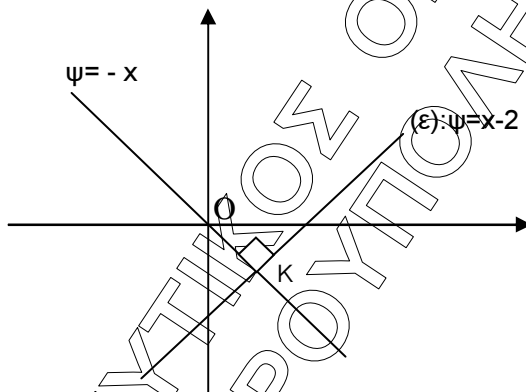
**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

**A.**

α) Ο μιγαδικός  $z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  αντιστοιχεί στο σημείο  $M(2\lambda + 1, 2\lambda - 1)$   
 $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Τότε } \left. \begin{array}{l} x = 2\lambda + 1 \\ \psi = 2\lambda - 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda = \frac{x-1}{2} \\ \psi = 2 \cdot \frac{x-1}{2} - 1 \end{array} \right\} \psi = x - 2$$

β) Το  $|z|$  αντιπροσωπεύει την απόσταση του  $z$  από το  $O(0,0)$



$$|z|_{\min} = (OK) = d(O, \epsilon) = \frac{|0 - 0 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$

Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου K.

$$\lambda_{OK} \cdot \lambda_{\epsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} \cdot (1) = -1$$

$$OK: \psi = -x$$

Λύνω το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = -x \\ \psi = x - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \psi = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

Δηλαδή  $K(1, -1)$  άρα  $z_0 = 1 - i$

B.  $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$  έστω  $z = \alpha + \beta i$

$$\text{Τότε } \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 13 - (\beta - 1)i = 0$$

$$\text{Άρα } \left. \begin{matrix} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 13 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix} \right\} \left. \begin{matrix} \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Άρα } w_1 = 3 + i \quad \text{ή} \quad w_2 = -4 + i$$

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

$$\text{Α. } f(x) = a^x - \ln(x+1) \quad x > -1$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, +\infty)$  με  $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$ .

Παρατηρούμε ότι  $f(0) = 1$

Άρα ισχύει  $f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x > -1$ .

Άρα η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 0$  και επειδή είναι παραγωγίσιμη από το θεώρημα του Fermat θα ισχύει ότι

$$f'(0) = 0 \Rightarrow a^0 \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$$

Β.

α. Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-1, +\infty)$  με  $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$

Παρατηρούμε ότι  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x > -1$  άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $(-1, +\infty)$ .

$$\beta. f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad (x > -1).$$

Παρατηρούμε ότι  $f'(0) = 1 - 1 = 0$  άρα το  $x_0 = 0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $f$ .

Όμως  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x > -1$  άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-1, +\infty)$ .

• Για κάθε  $x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $(-1, 0]$ , η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1, 0]$ .

• Για κάθε  $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ . Και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

|      | $-\infty$ | $-1$                                                                                | $0$                                                                                 | $+\infty$ |
|------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f'$ |           | -                                                                                   | ○                                                                                   | +         |
| $f$  |           |  |  |           |

Ο.Ε.

$\gamma$ . Θεωρώ  $g(x) = (x-2)[f(\beta)-1] + (x-1)[f(\gamma)-1]$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0,2]$  ως πολυωνυμική.

- $g(1) = -[f(\beta)-1]$   
 $g(2) = f(\gamma)-1$

Για κάθε  $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$  λόγω του  $\beta$ ) ερωτήματος  $f(\beta) > 1, f(\gamma) > 1$ .

Άρα  $g(1) \cdot g(2) < 0$ . Εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano για την  $g$  στο  $[1,2]$ , οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της  $g(x) = 0$  στο  $(1,2)$   $\Leftrightarrow$

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

α)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{1 + \sqrt{1-t^2}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{άρα } G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t f(t)dt}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x f(x)}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x f(x)}{1} = 0$$

[Διότι η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη]

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right] = 3$$

$$G(0)=3$$

Άρα  $G$  συνεχής στο  $x_0 = 0$

Για κάθε  $x \in (0, 2]$  η  $G$  είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Άρα  $G$  συνεχής στο  $[0, 2]$

β)

Για κάθε  $x \in (0, 2)$   $G(x) = \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$  παραγωγίσιμη με

$$G'(x) = \frac{H'(x) \cdot x - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$$

(γ)

- $G$  συνεχής στο  $[0,2]$
- $G$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$
- $G(0)=3$

$$\begin{aligned}
 G(2) &= \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 \\
 &= \frac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2} + 3 = 3
 \end{aligned}$$

Άρα εφαρμόζεται για την  $G$  το θεώρημα Rolle στο  $[0, 2]$  και υπάρχει  $\alpha \in (0, 2)$  έτσι ώστε  $G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$

δ) Η  $G$  είναι συνεχής στο  $[0, \alpha]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, \alpha)$  άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ για την  $G$  στο  $[0, \alpha]$  και άρα υπάρχει  $\xi \in (0, \alpha)$  ώστε

$$\begin{aligned}
 G'(\xi) &= \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} &= \frac{-\int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha} \\
 \Leftrightarrow \alpha H(\xi) &= \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt \\
 \Leftrightarrow \alpha \int_0^\xi tf(t)dt &= \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt
 \end{aligned}$$

**Επιμέλεια:** Δριμλής Βασίλης, Μαθηματικός  
 Ξηταβελώνης Πέτρος, Μαθηματικός  
 Τσαρπαλής Ιωάννης, Μαθηματικός  
 Τσόγιας Δημήτρης, Μαθηματικός

**ΣΧΟΛΙΟ**

Τα θέματα των μαθηματικών ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας, για διαβασμένους μαθητές και γνώστες του συνόλου της ύλης.